2021 年度

高校 帰国生入試問題

数　　学

（60 分）

＜注　意＞

1. 開始のチャイムがなるまで，この冊子を開いてはいけません。
2. 問題は 2 ページから 15 ページに印刷されています。
3. 解答用紙は 2 枚あります。
4. 受験番号と氏名は解答用紙の定められたところに記入しなさい。
5. 解答はすべて解答用紙の定められたところに記入しなさい。
6. 答の $\sqrt{\quad}$ の中はできるだけ簡単にしなさい。
7. 円周率は π を用いなさい。

受 験 番 号				

試験問題は次のページから始まります。

$\boxed{1}$　次の問いに答えなさい。

(1)　$-(ab^2c)^2 \div a^2b^3c^4 \times (-2abc^2)^3$　を計算しなさい。

(2)　$\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{\sqrt{15}} - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$　を計算しなさい。

(3)　$(x+2)^2+(x+2)(x-1)-x^2+4$　を因数分解しなさい。

(4)　連立方程式　$\begin{cases} \dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{y+1}=1 \\ \dfrac{y+1}{x-1}=2 \end{cases}$　を解きなさい。

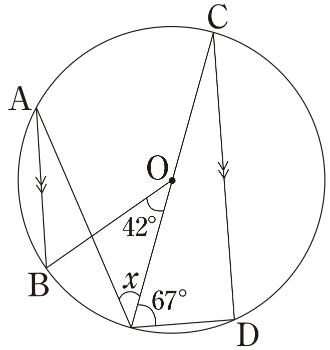
(5)　2 次方程式　$(x+1)(x+2)+3=4(x+5)$　を解きなさい。

(6)　$\dfrac{56}{n^2+n+1}$ が整数となるような整数 n をすべて求めなさい。

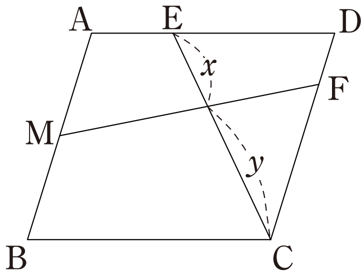
(7)　関数 $y=-\frac{1}{3}x^2$ について，x の値が 3 から a まで増加したときの変化の割合が $-\frac{5}{2}$ であるとき，a の値を求めなさい。ただし，$a \neq 3$ とする。

(8)　赤玉 3 個，白玉 2 個，青玉 1 個が入っている袋から同時に 2 個の玉を取り出すとき，それらの色が同じである確率を求めなさい。

(9)　図の∠x の大きさを求めなさい。ただし，点 O は円の中心，AB∥CD とする。



(10)　図の平行四辺形 ABCD において，$x:y$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。ただし，AE：ED=1：2，CF：FD=3：1，M は辺 AB の中点とする。



(11)　容器に4%の食塩水が400g入っている。この食塩水に次の操作をした。

操作①　容器からx gの食塩水を取り出した後，容器に8%の食塩水をx g加えてよくかき混ぜた

操作②　操作①でできた食塩水からx gを取り出した後，容器にx gの水を加えてよくかき混ぜた

操作②でできた食塩水の濃度は3.51%だった。

（ア）　操作①でできた食塩水に含まれる食塩の質量をxの式で表しなさい。

（イ）　操作②でできた食塩水に含まれる食塩の質量をxの式で表しなさい。

（ウ）　xの値を求めなさい。

2 以下の文章を読み，次の問いに答えなさい。

数学科の Math 先生と生徒の太郎君が「極限，無限の和，曲線に囲まれた部分の面積」について話しています。

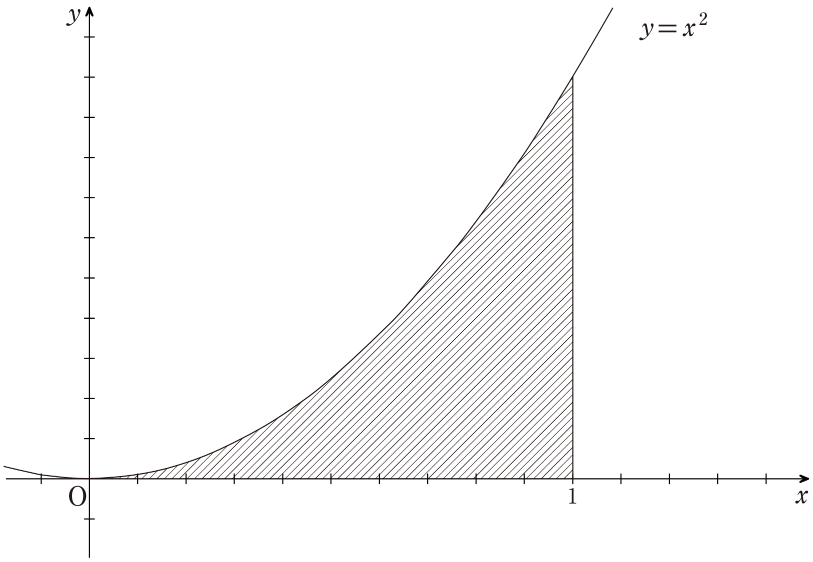


図1

Math: 今日は図1の放物線（$y=x^2$）と直線（x 軸と $x=1$）に囲まれた斜線部分の面積を求めてみよう。その準備として「極限」,「無限の和」というアイデアが必要なんだね。ただ今日の話の内容を厳密に「証明」するのは厳しいので，直観を大切に考えてくださいね。
最初に，アルキメデス（Archimedes，B.C. 287 ～ B.C. 212）が曲線図形に直線で囲まれた図形を内接および外接させ，これらをどんどん曲線図形に近づけていくことにトライしました。
その後，ピエール・ド・フェルマー（Pierre Fermat，A.D. 1601 ～ A.D. 1665）はアルキメデスの古典的手法をきちんと専門的にまとめ上げました。今日はアルキメデスとフェルマーのアイデアを利用して曲線に囲まれた部分の面積を求めてみましょう。さて太郎君「極限」というイメージはどんな感じかな？

太 郎:「ぎりぎり」のところのイメージがあります。限界とか限度のような感じですか。

Math: そうですね。今はそれで充分です。では次のようなことを考えましょう。

1に$\dfrac{1}{2}$を加え，次に$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$を加え，さらに$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$を加え，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$を加え，というように$\dfrac{1}{2}$の累乗を限りなく加えていったらどうなるでしょう？

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots \qquad (\mathrm{i})$$

ここで「…」は限りなく続くという意味です。まさしく限りなく加えなさいということだね。

また，数をある規則で並べたものを「数列(sequence)」，数列を作る一つ一つの数を「項(term)」と言います。

上記（ｉ）のように数列の項を順に和の記号で結んだものを「級数(series)」と言います。特に上記（ｉ）のような累乗の和を「幾何級数(geometric series)」と言います。

太郎君，限りなく加えるといくつくらいになると思う？直観でいいですよ。

太　郎: えーと，1,000,000 くらいかな？

Math: Oh−，すごく大きな数ですね。

太　郎: う～ん，最初は小さいかもしれませんが，「塵(ちり)も積もれば山となる」という諺(ことわざ)がある通りにとても大きな数になると思います！

Math: 実は，次のような公式があるんですよ。

公式　$$1+r+r^2+r^3+r^4+\cdots=\frac{1}{1-r} \qquad (\mathrm{ii})$$

ただし，$-1<r<1$（rの大事な条件）

太　郎: こんなにシンプルな式で求められるのですね。数学のマジカルパワーには驚かされます。

Math: では太郎君，実際に公式（ii）を用いて級数（ｉ）の和を求めてみましょう。

【問1】 級数（ｉ）の和を公式（ii）を用いて求めなさい。

Math: あまり大きな数にはなりませんでしたね。この公式は今回重要な役割をしますので，気に留めておいてください。

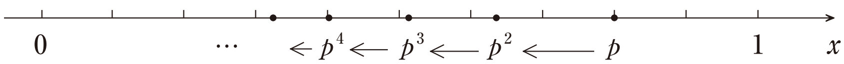
Math: 次に放物線と直線に囲まれた部分の面積を求めてみよう。
Key word は「曲線を直線で近似する」ことなんだよ。

太　郎: 曲線を直線で近似する？そんなことできるの？

Math: もちろんだよ。正確な論証は厳しいけど，太郎君の直観次第さ。

太　郎: 先生，僕は直観人間と言われているので大丈夫です。
ワクワクしますね，曲線を直線で近似するアイデアは。

Math: さてこれからは 17 世紀に活躍したフェルマーが用いた方法で曲線に囲まれた部分の面積を求めてみましょう。
まずは 1 より小さい正の数 p（たとえば $p=0.8$ とする）に関して，
p，p^2，p^3，p^4，…の位置を下のように図 1 の x 軸上にとってみます。



指数 k が増加するにしたがい，p^k は減少します。そして 0 に近づきます。また，右から左へ移動する（$p \Rightarrow p^2 \Rightarrow p^3 \Rightarrow p^4 \Rightarrow \cdots$）とき，各 2 点間の距離もだんだん近くなり，そして 0 に近づきます。

次に，関数 $y=x^2$ について $x=p,\ p^2,\ p^3,\ \cdots$ のときの値を求めます。

$x=p$ のとき，$y=p^2$
$x=p^2$ のとき，$y=(p^2)^2=p^4$
$x=p^3$ のとき，$y=(p^3)^2=p^6$
$\vdots$

これを図示したのが図2です。

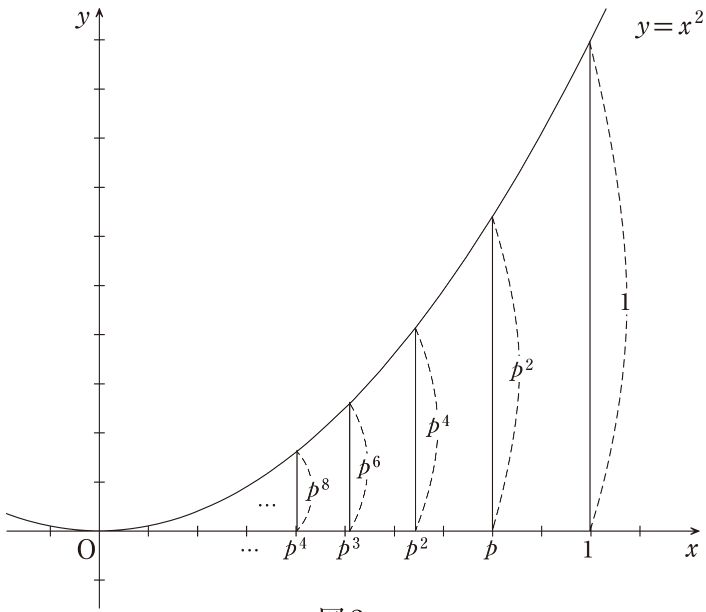


図2

次に，図のように無限に続く「長方形の階段」を作りましょう。
例えば，$p = 0.7$，$p = 0.8$ として作ったのが，それぞれ図3と図4です。

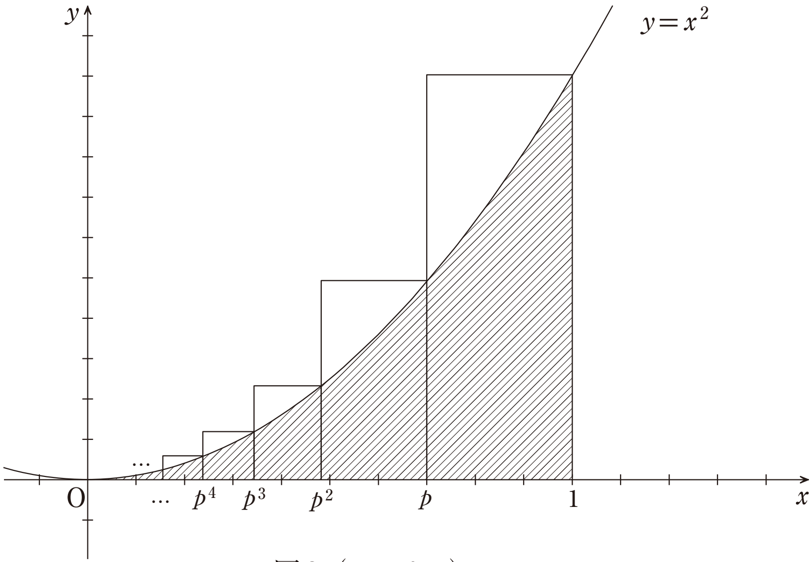


図3（ $p = 0.7$ ）

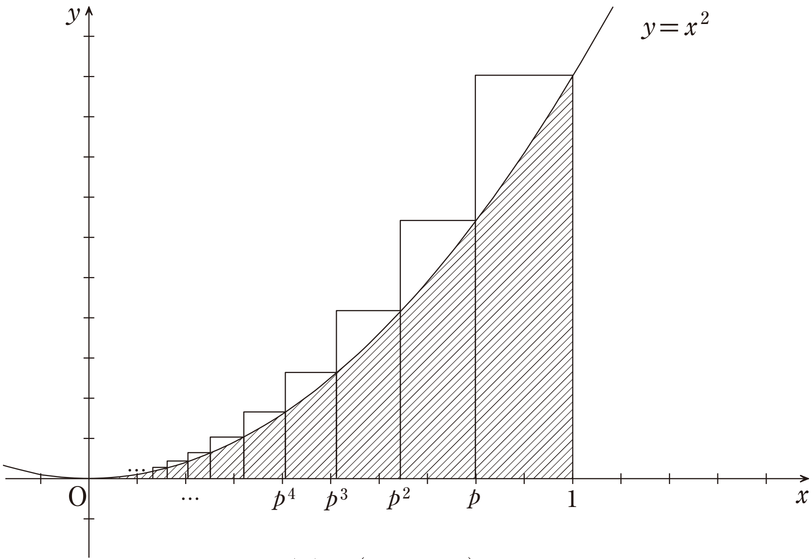


図4（ $p = 0.8$ ）

Math: 太郎君，求めたいのは斜線部分の面積ですよね。図3と図4では，どちらの方が精度が高い（長方形の面積の和が斜線部分の面積に近い）でしょうか。直観で答えてください。

太 郎: どちらも長方形の面積の和の方が斜線部分の面積よりも大きくなっていますが，僕には図4の方が，精度が高いように感じられます。

Math: そうですね。ちなみに，$p=0.9$ のときは，図5のようになります。

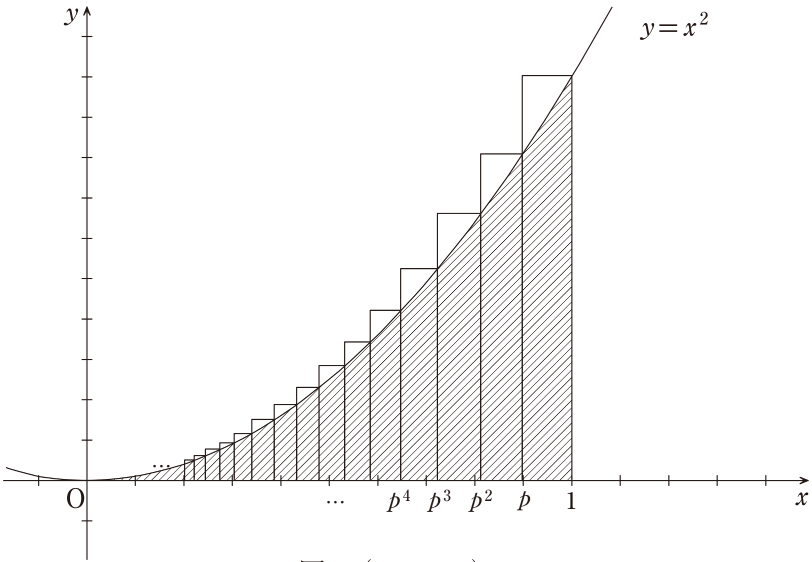


図5（$p=0.9$）

太 郎: ということは，p が1に近ければ近いほど精度が高くなるのですか？

Math: その通り！太郎君の直観はたいしたものです。p が限りなく1に近いほうが精度は高いですね。繰り返しますが，長方形の面積の和が斜線部分の面積に限りなく近くなるのは p が1に限りなく近いときです。

Math: さてさていよいよ終盤に近づきましたよ。今度は一般論で話しますね。

【問2】 以下の空欄 $\boxed{(1)}$ ～ $\boxed{(10)}$ は p を用いて，$\boxed{(11)}$ は整数で，それぞれ埋めなさい。

Math: 同じように，1より小さい勝手な正の数 p を考えて，無限に続く「長方形の階段」を作ります。（図6）

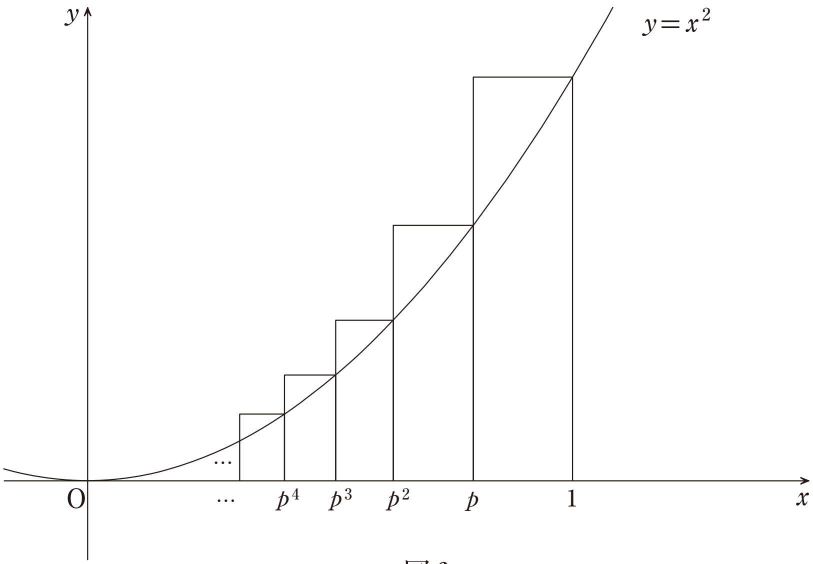


図6

では，図6で作った長方形の面積の和を求めましょう。

まず，一番右の長方形は，
高さが1で，幅が $\boxed{(1)}$ なので，面積は $\boxed{(2)}$ です。

次に，右から2番目の長方形は，
高さが $\boxed{(3)}$ で，幅が $\boxed{(4)}$ なので，面積は $\boxed{(5)}$ です。

次に，右から3番目の長方形は，

高さが $\boxed{(6)}$ で，幅が $\boxed{(7)}$ なので，面積は $\boxed{(8)}$ です。

このことを続けていき，長方形の面積の和を求めると，

$$(\text{長方形の面積の和}) = (1-p) + p^3(1-p) + p^6(1-p) + p^9(1-p) + \cdots$$

$1-p$ は各項に含まれているので，

$$(\text{長方形の面積の和}) = (1-p)(1+p^3+p^6+p^9+\cdots)$$

ここで，$1+p^3+p^6+p^9+\cdots$ を公式（ⅱ）の $r=p^3$ として考えると，

$$(\text{長方形の面積の和}) = (1-p)\left(\frac{1}{\boxed{(9)}}\right)$$

さらに，$1-p^3=(1-p)(1+p+p^2)$ と因数分解できるので，

$$(\text{長方形の面積の和}) = \frac{1}{\boxed{(10)}}$$

さあ太郎君，斜線部分の面積はどうなるかな。適切な p の値を考えてごらん。

太　郎: 斜線部分の面積は $\dfrac{1}{\boxed{(11)}}$ です。

Math: その通り！