

2023 年度

高校 帰国生入試問題

数 学

(60 分)

<注 意>

1. 開始のチャイムがなるまで、この冊子を開いてはいけません。
2. 問題は 2 ページから 11 ページに印刷されています。
3. 解答用紙は 2 枚あります。
4. 受験番号と氏名は解答用紙の定められたところに記入下さい。
5. 解答はすべて解答用紙の定められたところに記入下さい。
6. 答の $\sqrt{\quad}$ 中はできるだけ簡単に下さい。
7. 円周率は π を用い下さい。

受 験 番 号			

試験問題は次のページから始まります。

1 次の問いに答えなさい。

(1) $\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}xy^2\right)^3 \div \left\{-\left(-\frac{2y}{\sqrt{6}x}\right)^2\right\}^3 \div \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^5$ を計算しなさい。

(2) $(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1) - \frac{1}{1 - \sqrt{2}}$ を計算しなさい。

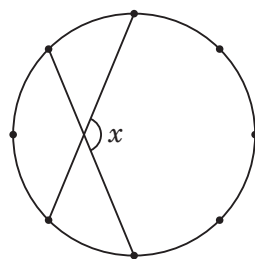
(3) $a(2b - 1)^2 - a(1 - 2b)$ を因数分解しなさい。

(4) 連立方程式
$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} - x = 2 \\ \frac{1}{x+y} + y = 4 \end{cases}$$
 を解きなさい。

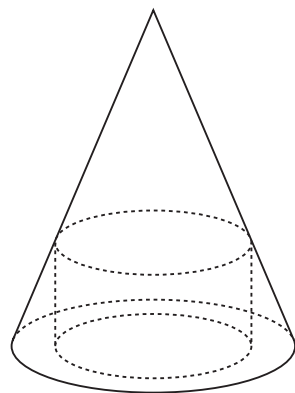
(5) 2 次方程式 $3(x+4)^2 = 2(x-3)(x+9) - (x+10)(x-10)$ を解きなさい。

(6) 放物線 $y = x^2$ 上に点 $A(-2, 4)$, 点 $P(t, t^2)$ がある。原点を O とするとき,
 $\angle OAP = 90^\circ$ となるような t の値を求めなさい。

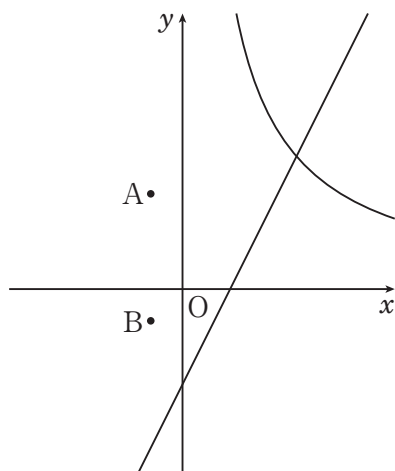
- (7) 図の $\angle x$ の大きさを求めなさい。ただし、円周上の点は円周を8等分した点とする。



- (8) 図のように、底面の半径が1，母線の長さが $\sqrt{5}$ の円錐に円柱が内接している。円柱の底面の半径と高さが等しいとき，円柱の体積を求めなさい。ただし，円周率は π とする。



- (9) 図のように、曲線 $y = \frac{60}{x}$ ($x > 0$)、直線 $y = 2x - 6$ 、2点 $A(-2, 6)$ 、 $B(-2, -2)$ がある。また、点 C を直線 $y = 2x - 6$ 上に、点 D を曲線 $y = \frac{60}{x}$ ($x > 0$) 上にとる。



- (ア) 4点 A , B , C , D を頂点とする四角形が平行四辺形となるとき、点 C の座標をすべて求めなさい。ただし、点 C の x 座標は正とする。
- (イ) 原点 O を通る直線 ℓ が、平行四辺形 $ABCD$ の面積を 2 等分するとき、直線 ℓ の式を求めなさい。ただし、点 C の y 座標は点 D の y 座標より小さいものとする。

(10) 自然数 n と $m \leq n$ を満たす自然数 m に対して,

n より小さい $(m-1)$ 個の自然数 $n-1, n-2, \dots, n-(m-1)$ と,
 n より大きい $(m-1)$ 個の自然数 $n+1, n+2, \dots, n+(m-1)$ および
自然数 n をすべてかけたものを $\langle n, m \rangle$ と定める。

$$\langle n, m \rangle = \{n + (m-1)\} \times \dots \times (n+1) \times n \times (n-1) \times \dots \times \{n - (m-1)\}$$

(ア) $\langle 5, 3 \rangle$ を求めなさい。

(イ) $\langle n, 2 \rangle = 168n$ を満たす自然数 n を求めなさい。

(ウ) $n \geq 2$ とするとき, 次の にあてはまる n の式を求めなさい。

$$\langle n+2, n \rangle + \langle n+1, n \rangle = \left(\text{ } \right) \times \langle n+1, n-1 \rangle$$

2

以下の文章を読み、ア～サにあてはまる数または式を求めなさい。ただし、イについては、展開しなくてもよい。

数学科の **Math** 先生と生徒の太郎くんが n 次方程式の解の公式について話をしている。

Math: 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の公式は知っていますよね？

太 郎: もちろん！ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ です！

Math: その通りです。

太 郎: 公式なので頑張って暗記しました。

Math: それでは、1 次方程式 $ax + b = 0$ の解の公式は知っていますか？

太 郎: 1 次方程式の解の公式！？ 解の公式は 2 次方程式だけしか知りません…。公式なんて使わなくても式変形すれば解けるので。

Math: あえて公式として表現すると、1 次方程式 $ax + b = 0$ の解の公式は

$x = -\frac{b}{a}$ となります。左辺の b を移項してから両辺を a で割れば得られますよね。2 次方程式についても、式変形により解の公式が得られます。

太 郎: 2 次方程式の段階で公式を導くのは難しかったので、3 次方程式や 4 次方程式の解の公式を導くのは大変な作業のような気がします。

Math: その通りです。ちなみに、3 次方程式と 4 次方程式については解の公式が存在しますが、5 次以上の方程式については解の公式は存在しません。

太 郎: 5 次以上だと存在しないのですか。存在しないことが証明されているなんて…数学のマジカルパワーには圧倒されます。気を失いそう…。

Math: しっかりしてください。気を取り直して、3 次方程式と 4 次方程式については解の公式が存在する、つまり式変形により解けるので、まずは 4 次方程式の解の公式に挑戦しませんか？

太 郎: 3 次ではなく 4 次なのですね! 難しい方がやる気が出ます!!
ぜひ教えて下さい。

Math: それでは 4 次方程式 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ を式変形により解いてみましょう。

まずは両辺を a で割り、 $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0 \cdots \textcircled{1}$ の形にします。

ここで、 p, q, r, s については $p = \frac{b}{a}$ のように置き換えています

(q, r, s についても同様、以下省略)。

次に、 $x = y - \frac{1}{4}p$ とおいて、 $\textcircled{1}$ に代入します。

太 郎: なぜ $x = y - \frac{1}{4}p$ とおくのでしょうか?

Math: この置き換えにより $\textcircled{1}$ の y^3 の項を消去することができるのです。
次の展開式を確認して下さい。

$$\begin{aligned}x^4 &= \left(y - \frac{1}{4}p\right)^4 = y^4 - py^3 + \frac{3}{8}p^2y^2 - \frac{1}{16}p^3y + \frac{1}{256}p^4 \\x^3 &= \left(y - \frac{1}{4}p\right)^3 = y^3 - \frac{3}{4}py^2 + \frac{3}{16}p^2y - \frac{1}{64}p^3\end{aligned}$$

太 郎: なるほど。これらを $\textcircled{1}$ に代入すると…確かに y^3 の項が消えますね。

Math: この置き換えにより得られる 4 次方程式を $y^4 + ky^2 + ly + m = 0$ とし、さらに移項して $y^4 = -ky^2 - ly - m$ を得ます。続けて、この式の両辺に $2ny^2 + n^2$ を加え、次のように左辺は因数分解し、右辺は y について整理します。

$$y^4 + 2ny^2 + n^2 = -ky^2 - ly - m + 2ny^2 + n^2$$

$$\left(\boxed{\text{ア}}\right)^2 = (2n - k)y^2 - ly + n^2 - m \quad \cdots \textcircled{2}$$

太 郎: 左辺が 2 乗の形になったので、右辺も 2 乗の形になれば $A^2 = B^2$ となるので解けそうですね!

Math: 鋭いですね。これから行う式変形の肝となるアイデアです。②の右辺に注目しましょう。

y の 2 次方程式 $(2n-k)y^2 - ly + n^2 - m = 0 \cdots \textcircled{3}$ を解の公式を用いて

$$\text{解くと, } y = \frac{l \pm \sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{2(2n-k)} \quad \text{※イについては, 展開しなくてもよい}$$

となりますが, 特に $\boxed{\text{イ}} = 0 \cdots \textcircled{4}$ のとき③はただ 1 つの解をもつので, 次のように因数分解できます。

$$(2n-k)y^2 - ly + n^2 - m = (\alpha y + \beta)^2$$

太 郎: なるほど。解の公式の「ルートの中身」が 0 のとき 2 乗の形に因数分解できるのですね。

Math: ちなみに, 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ に対して,
 $b^2 - 4ac$ (解の公式の「ルートの中身」) を「判別式」といいます。

太 郎: (判別式) = 0 となる n の値を求めることがポイントなんですね。

Math: その通りです。④は n の 3 次方程式ですから, 解の公式等により解くことができます。

それではいよいよ最終局面です。④を満たす n の値を②に代入し, 次のように式変形を行います。

$$\left(\boxed{\text{ア}} \right)^2 = (\alpha y + \beta)^2$$

$$\left(\boxed{\text{ア}} \right)^2 - (\alpha y + \beta)^2 = 0$$

$$\left(\boxed{\text{ア}} + \alpha y + \beta \right) \left(\boxed{\text{ア}} - \alpha y - \beta \right) = 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

⑤より, 2 つの 2 次方程式 $\boxed{\text{ア}} + \alpha y + \beta = 0, \boxed{\text{ア}} - \alpha y - \beta = 0$ が得られますね。

太 郎: 2 次方程式は簡単に解けます! 2 次方程式が 2 つ得られるので, それぞれ解けば 4 つの解が得られます!

Math: 流れは理解できたようですね。それでは、

4 次方程式 $x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 29x + 6 = 0$ を解いてみましょう。

太 郎: $x = y - \boxed{\text{ウ}}$ とおいて代入すると…

$$y^4 - 18y^2 + 3y + 20 = 0 \text{ となります。}$$

Math: その通りです。

太 郎: 続けて、移項して両辺に $2ny^2 + n^2$ を加えればいいので

$$y^4 + 2ny^2 + n^2 = 18y^2 - 3y - 20 + 2ny^2 + n^2$$

$$\left(\boxed{\text{ア}} \right)^2 = (2n + 18)y^2 - 3y + n^2 - 20 \quad \cdots \text{⑥}$$

となります。

Math: その調子ですよ。次は⑥の右辺について、(判別式) = 0 となる n の値を求めればよいのですが、3 次方程式が関わってくるので少し手助けします。(判別式) = 0 となる n の値を 1 つ求めると $n = -\frac{9}{2}$ です。これを⑥に代入して下さい。

太 郎: 代入すると…ホントだ！右辺も 2 乗の形になりました！あとは移項して因数分解すれば解けそうです！

ちょっと時間を下さい……できました！因数分解すると

$$\left(y^2 + \boxed{\text{エ}}y - \boxed{\text{オ}} \right) \left(y^2 - \boxed{\text{カ}}y - \boxed{\text{キ}} \right) = 0$$

となります。

Math: あとは 2 次方程式を 2 つ解けばいいので簡単ですね。

太 郎: y の値を求めてから $x = y - \boxed{\text{ウ}}$ に代入すればいいので、

$$x = -\boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}}, \frac{-\boxed{\text{コ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{2} \text{ です！}$$

Math: お疲れ様でした。残るは 3 次方程式の解の公式ですね。

太 郎: 4 次方程式の解の公式をマスターした私には簡単過ぎるかもしれません。

Math: ふふふ。十分難しいので覚悟して下さい。

太 郎: え?? そうなんですか!! ?聞いてないよー!!!

<学びは続く>

